مذكرة التفاضل

النهايات والأتصال

الصف الثاني الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسي الأول ٢٠٢٠

النهايـــات والأتصال

- مقدمة إيجاد النهاية تقدير النهاية عدديا وبيانيا
- نهاية دالة عند نقطة جبريا.
- نظرية (٤) القانون.
- نهاية دالة عند اللانهاية.
- نهاية الدوال المثلثية
- بحث وجود نهاية للدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

(١) مفاهيم ورموز وتمهيدات

ح = مجموعة الأعداد الحقيقية =] $-\infty$ ، ∞ [

ح$^+$ = مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة =] ٠ ، ∞ [

ح$^-$ = مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة =] $-\infty$ ، ٠ [

** أنواع الكميات :

(١) الكمية المعينة : هى الكمية التى لها جواب محدد مثل : ٣ – ٥ ، ٩ × ٨ ، ٧ ÷ ٤

(٢) الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى لا معنى لها مثل : $\frac{\text{أ}}{\text{صفر}}$ ، أ ≠ ٠

---

(٢) الرمزان ∞ ، $-\infty$:

❖ الرمز ∞ يرمز لأى كمية تكون أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه

❖ الرمز $-\infty$ يرمز لأى كمية تكون أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه

❖ إذا كان : أ ∈ ح فإن : $\infty \pm$ أ = ∞ ، $-\infty \pm$ أ = $-\infty$

، ∞ × أ = ∞ عندما أ > ٠ ، $-\infty$ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠

$-\infty$ × أ = $-\infty$ عندما أ > ٠ ، ∞ عندما أ < ٠ ، كمية غير معينة عندما أ = ٠

(٣) الكمية الغير المعينة : هى الكمية التى لا نستطيع أن نجد لها جواباً محدداً حيث يكون لها عدد لا نهائى من الحلول مثل : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معينة "

* يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية إذا ضربت فى صفر كان الناتج = صفراً

∵ ٠ × أى عدد = ٠ ∴ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ × أى عدد = ∞ ∴ $\frac{\infty}{\infty}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ + أى عدد = ∞ ∴ ∞ ـ ∞ = أى عدد (غير معينة)

∵ $\frac{\text{أى عدد}}{\infty}$ = صفر ∴ ٠ × ∞ = أى عدد (غير معينة)

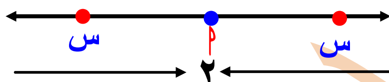
العامل الصفرى :

إذا كانت د دالة فى المتغير س على صورة كثيرة حدود من درجة ن وكانت د (؍) = ٠ حيث ؍ ∈ ح فإن المقدار (س ـ ؍) يسمى العامل الصفرى للدالة د

وهذا يعنى أن : د (س) يقبل القسمة على (س ـ ؍) بدون باق

أى أن : د (س) = (س ـ ؍) × كثيرة حدود أخرى

** مفهوم الرمز " ⟵ " فى النهايات :



إذا تصورنا أن س نقطة تتحرك على خط الأعداد فإن موضعها عند كل نقطة أثناء حركتها يعين عدداً حقيقياً ما .

قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أكبر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليمين أ، قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أصغر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليسار وإذا أقتربت س من العدد ٢ من جهة اليمين ومن اليسار قيل إن س تقترب من العدد ٢ ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة : س ⟵ ٢

تقدير النهاية عددياً وبيانياً

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ عند س = ١

بالتعويض عن قيمة س = ١ فإن د(١) = $\frac{(١)^{٢} - ١}{١ - ١}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

ولذلك نلجأ إلى دراسة نهاية د(س) عندما س تقترب إلى العدد (١)

[١] الطريقة العددية

	س تقترب جداً من (١) من اليمين ⟸						⟹ س تقترب جداً من (١) من اليسار				
س	١,٤	١,٣	١,٢	١,١	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦
د(س)	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢,٠١	غير معينة	١,٩٩	١,٩	١,٨	١,٧	١,٦
	د(س) تقترب جداً من (٢) من اليمين ⟸					⟹ د(س) تقترب جداً من (٢) من اليسار					

وهذة الطريقة تسمى $\lim_{س \leftarrow ١}$ د(س) = ٢

وتقرأ : نهاية د(س) عندما تقترب س من ١ تساوى ٢

تعريف :

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة (ل) عندما تقترب س من ٫م من جهتى اليمين واليسار فإن نهاية د(س) تساوى (ل) وتكتب رمزياً $\lim_{س \leftarrow م}$ د(س) = ل

[٢] تقدير النهاية بيانياً

د(س) = $\frac{س^{٢} - ١}{س - ١}$ غير معينة عند س ⟵ ١

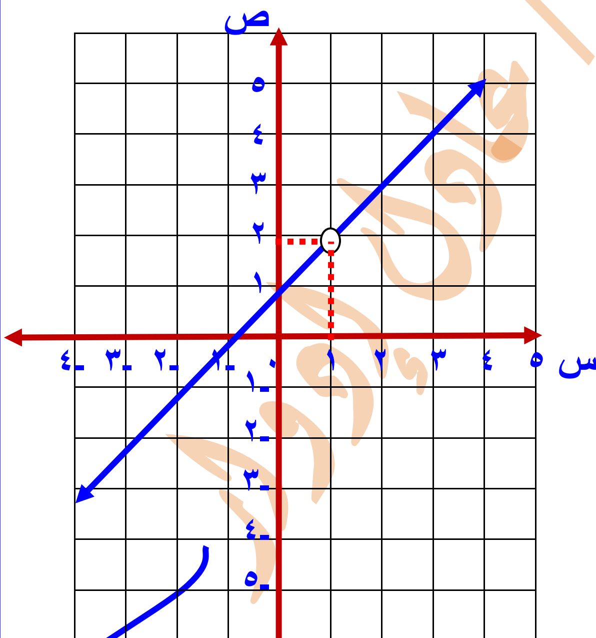
د(س) = $\frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$ = (س + ١)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ١+١=٢

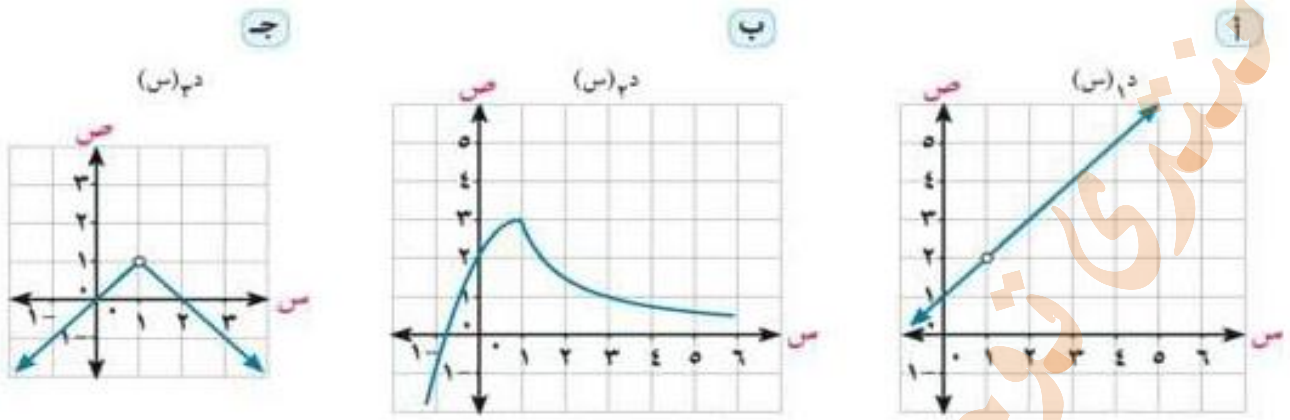
عندما : س ⟵ ١ من اليمين واليسار

فإن د(س) ⟵ ٢ من فوق وتحت

فيكون : $\lim_{س \leftarrow ١}$ د(س) = ٢

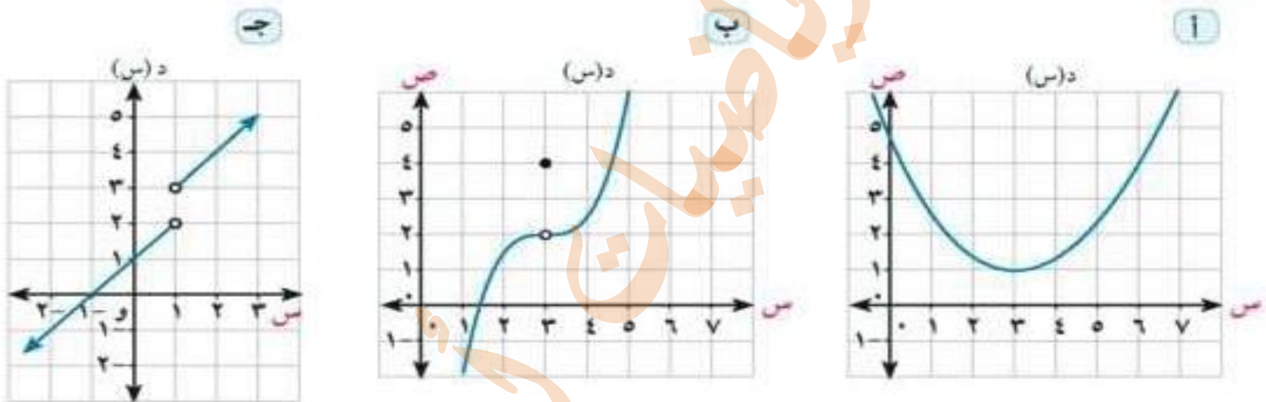


مثــ١ــال : قدر نهاية الدالة د(س) عندما س ⟵ ١



(أ) نهـــــا د(س) = ٢ (س ⟵ ١) (ب) نهـــــا د(س) = ٣ (س ⟵ ١) (جـ) نهـــــا د(س) = ١ (س ⟵ ١)

مثــ٢ــال : قدر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة

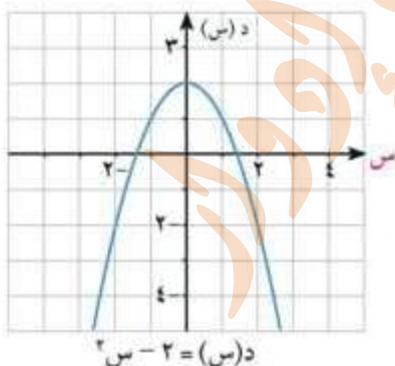


(أ) نهـــــا د(س) = ١ (س ⟵ ٣) (ب) نهـــــا د(س) = ٢ (س ⟵ ٣) (جـ) نهـــــا د(س) = (س ⟵ ١)

غير موجودة

ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية

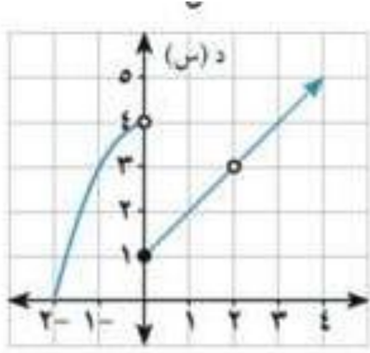
مثــ٣ــال : من الشكل البيانى المقابل



(أ) نهـــــا (٢ ـ س^{٢}) = ٢ (س ⟵ ٠)

(ب) د(صفر) = ٢

مثـــ٤ــال : من الشكل البيانى المقابل



(أ) د(٠) = ١ (ب) د(٢) غير معرفة

(جـ) $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = غير موجودة

(د) $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = ٣

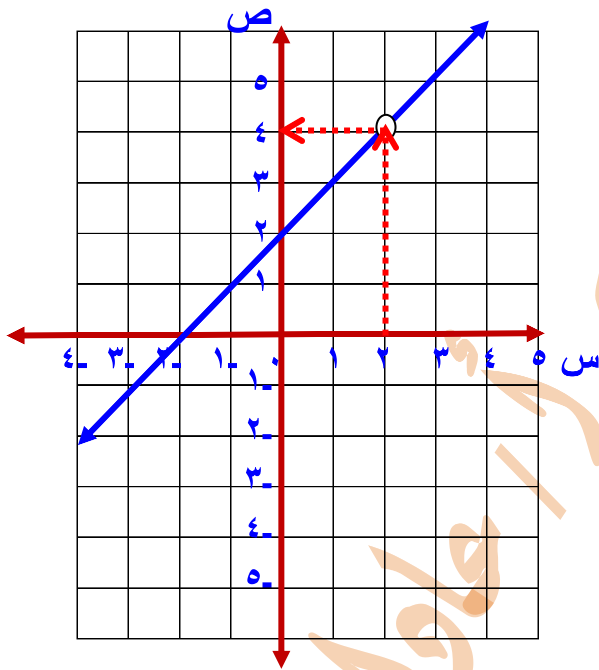
مثـــ٥ــال: أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\lim_{س \to ٢} \frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	٢	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٤	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١

د(س) = $\frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$ غير معينة عند س ⟵ ١

د(س) = $\frac{(س - ٢)\ (س + ٢)}{(س - ٢)}$ = (س + ٢)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ٢+٢ = ٤



عندما : س ⟵ ٢ من اليمين واليسار

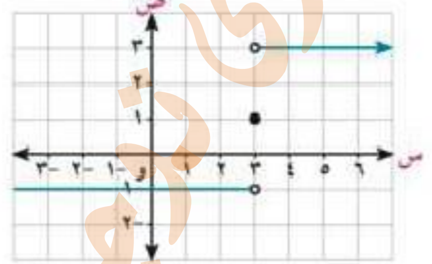
فإن د(س) ⟵ ٤ من فوق وتحت

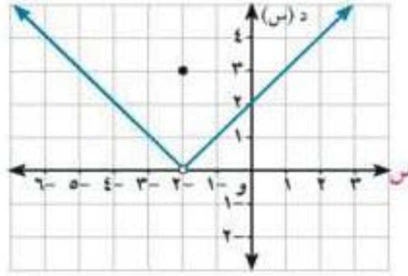
فيكون : $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٤

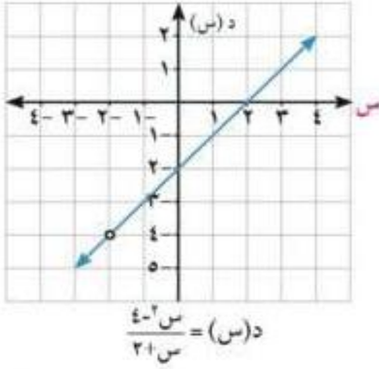
تمـــــارين

(١) قدّر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة

ⓐ $\lim_{س \leftarrow ٣}$ د(س)   ⓑ $\lim_{س \leftarrow -٢}$ د(س)   ⓒ $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د(س)





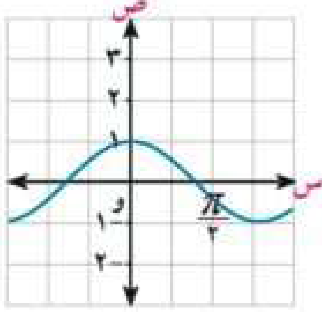


$د(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$

(٢) من الرسم البيانى أوجد

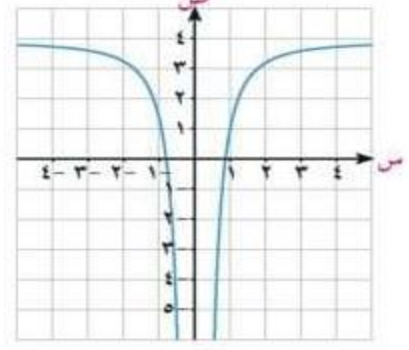
ⓐ $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د(س)

ⓑ د(٠)

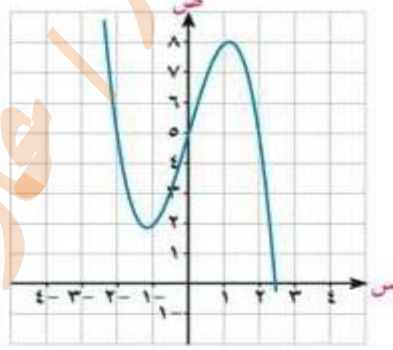


(٣) قدّر نهاية الدالة د(س) عند س ⟵ صفر

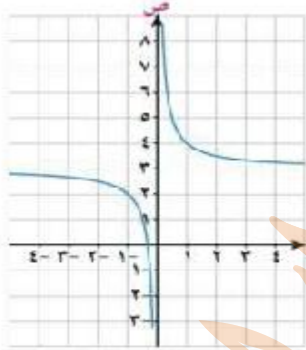
ⓐ



ⓑ



ⓒ



(٤) أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\lim_{س \leftarrow -١} \frac{(س^٢ - ١)}{(س - ١)}$

س	-١,١	-١,٠١	-١,٠٠١	-١	-٠,٩٩٩	-٠,٩٩	-٠,٩
د(س)				؟؟؟؟			

(٥) باستخدام الحاسبة قدّر نهاية الدوال الآتية

ⓐ $\lim_{س \to ٢}$ (٣س ـ ١) ⓑ $\lim_{س \to ١}$ (س^٢ +٢)

ⓒ $\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)}{(س^٢ - ١)}$ ⓓ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٤س + ٣)}{(س - ٣)}$

نهاية دالة عند نقطة

مثال : إذا كانت د (س) = ٣ س + ٤ إوجد د (س) عندما س ← ٠

الحـــــــــل

∵ س ← ١ ∴ نضع س = ١ + هـ حيث عندما س ← ١ فإن هـ ← ٠

∴ د (س) = ٣ (١ + هـ) + ٤ = ٣ + ٣ هـ + ٤ = ٧ + ٣ هـ

∴ د (س) ← ٧ عندما س ← ١

أى أن نهاية الدالة د(س) تساوى ٧ عندما س تؤول إلى ١

ويعبر عن ذلك بالصورة : $\lim_{س \to ١}$ (٣ س + ٤) = ٧

ملاحظة : فى المثال السابق نحصل على نفس النتيجة بالتعويض المباشر

نظرية : نهاية دالة كثيرة الحدود

نظـــرية (١)

* إذا كانت د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : $\lim_{س \to ٲ}$ د (س) = د (ٲ)

فمثلا : $\lim$ (٣ س + ٤) = د (٣) = ٣ × ٣ + ٤ = ١٣

نتيجة : نهاية الدالة الثابتة : إذا كانت د (س) = ك حيث ك ثابت

فإن : $\lim_{س \to ٲ}$ د (س) = ك

فمثلا : د (س) = ٤ ، $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٤

نظرية (٢) : إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س

وكانت : نهـــا د (س) = ل ، نهـــا ر (س) = م فإن :

(١) نهـــا (س ← م) [د (س) ± ر (س)] = نهـــا (س ← م) د (س) ± نهـــا (س ← م) ر (س)

= ل ± م

أى أن : نهاية المجموع الجبرى لدالتين (أو أكثر) = المجموع الجبرى لنهايتيهما

(٢) نهـــا (س ← م) [د (س) × ر (س)] = نهـــا (س ← م) د (س) × نهـــا (س ← م) ر (س)

= ل × م

أى أن : نهاية حاصل ضرب دالتين (أو أكثر) = حاصل ضرب نهايتيهما (النهايات)

(٣) نهـــا (س ← م) ك × د (س) = ك نهـــا (س ← م) د (س) = ك × ل حيث ك ثابت

أى أن : نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة

(٤) نهـــا (س ← م) $\frac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ = $\frac{\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{م}} \text{ د (س)}}{\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{م}} \text{ ر (س)}}$ = $\frac{\text{ل}}{\text{م}}$ حيث : م ≠ صفر

أى أن :

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما حيث : نهاية المقسوم عليه ≠ صفر

لإيجاد: نهـــا (س ← م) د (س) نوجد د (م) بالتعويض المباشر فإذا كان الناتج :

١ ـ عدداً حقيقياً فإن نهاية الدالة عند س = م هى هذا العدد الحقيقى

٢ ـ $\frac{\text{عدداً حقيقى} \neq \text{الصفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معرفة " فإن الدالة لا يكون لها نهاية عند م

٣ ـ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة تستخدم النظرية التالية

٤ ـ $\frac{\text{م}}{\pm \infty}$ = صفر

نظرية (٣) : إذا كانت د ، ق دالتين فى المتغير س

وكانت د (س) = ق (س) لجميع قيم س فيما عدا عند س = ٢

وكانت : نهـــا س ← ٢ ق (س) لها وجود

فإن : نهـــا س ← ٢ ق (س) = نهـــا س ← ٢ د (س)

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية وفيها نختصر العامل الصفرى (س – ٢) فى كل من البسط والمقام ويسمى عن طريق عدة طرق :

منها (!) التحليل ، (!!) القسمة المطولة ، (!!!) الضرب فى المرافق ....

مراجعة على التحليل : يراعى أولا إخراج العامل المشترك الأعلى

الفرق بين مربعين : $س^2$ – ٩ = (س – ٣) (س + ٣)

الفرق بين مكعبين : $س^3$ – ٨ = (س – ٢) ($س^2$ – ٢ س + ٤)

مجموع مكعبين : $س^3$ + ٢٧ = (س + ٣) ($س^2$ + ٣ س – ٩)

المقدار الثلاثى : إذا كان معامل $س^2$ = ١

$س^2$ + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)

$س^2$ + ٥ س – ٦ = (س – ١)(س + ٦)

$س^2$ – ٦ س – ١٦ = (س – ٨)(س + ٢)

إذا كان معامل $س^2$ ≠ ١

٣ $س^2$ + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)

٢ $س^2$ – ٥ س + ٢ = (٢ س – ١)(س – ٢)

٣ $س^2$ + ٧ س – ٦ = (س + ٣)(٣ س – ٢)

٣ $س^2$ – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)

المقدار الثلاثى المربع الكامل :

$س^2$ + ٦ س + ٩ = $(س + ٣)^2$

٢٥ $س^2$ – ٤٠ س + ١٦ = $(٥ س – ٤)^2$

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثــال١ : $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{3\text{س} + 4}{\text{س} + 5}$

الحــــــــل

بالتعويض نجد أن : $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{3\text{س} + 4}{\text{س} + 5} = \dfrac{3 \times 1 + 4}{1 + 5} = \dfrac{7}{6}$

مثــال٢ : $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{3\text{س} + 4}{\text{س} + 1}$

الحــــــــل

بالتعويض نجد أن :

$\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{3\text{س} + 4}{\text{س} + 1} = \dfrac{3 \times (-1) + 4}{-1 + 1} = \dfrac{1}{0}$ كمية غير معرفة

∴ الدالة ليس لها نهاية أو النهاية ليس لها وجود

إستخدام التحليل لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثــال٣ : $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3}$

الحــــــــل

بالتعويض عن : س = ٣ نجد أن : د (٣) $= \dfrac{(3)^2 - 9}{3 - 3} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3} = \dfrac{(\text{س} - 3)(\text{س} + 3)}{(\text{س} - 3)}$

$= (\text{س} + 3) = 6$

مثــال٤ : $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2}$

الحــــــــل

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) $= \dfrac{(2)^2 - 5 \times 2 + 6}{2 - 2} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2} = \lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{(\text{س} - 3)(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 2)}$

$= (\text{س} - 3) = -1$

مثـــ٥ــال : $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦}$

الحـــــــــل

بالتعويض عن س = ـ ٣ نجد أن : د (ـ ٣) = $\frac{٩ - ٣ \times ٣}{٩ - ٣ - ٦} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

$\therefore \lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦} = \lim_{س \to -٣} \frac{س (س + ٣)}{(س - ٢) (س + ٣)}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س}{(س - ٢)} = \frac{-٣}{-٣ - ٢} = \frac{٣}{٥}$

إستخدام القسمة المطولة لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثـــ٦ــال : $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦}{س^٢ - ٤ س + ٣}$

الحـــــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣^٣ - ٤ \times ٣^٢ + ٣ + ٦}{٣^٢ - ٤ \times ٣ + ٣} = \frac{صفر}{صفر}$

$\therefore$ (س - ٣) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

بإجراء قسمة مطولة للبسط على (س - ٣) " لصعوبة تحليل البسط "

$\because$ $س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦$ ÷ (س - ٣) = $س^٢ - س - ٢$

$\pm س^٣ \mp ٣ س^٢$

$- س^٢ + س + ٦$

$\mp س^٢ \pm ٣ س$

$- ٢ س + ٦$

$\mp ٢ س \pm ٦$

....

$\therefore \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣) (س^٢ - س - ٢)}{(س - ٣) (س - ١)} = \frac{٩ - ٣ - ٢}{٣ - ١} = ٢$

مثـــ٧ــال : $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢ س + ١}{س^٢ + ٣ س - ٤}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

(١) نكتب معاملات المقسوم مرتبة تنازلياً وتساوى المقسوم علية بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل

(٢) أترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول فى قيمة س وأكتب الناتج أسفل المعامل الثانى وأجمع

(٣) كرر عمليتى الضرب والجمع

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، –١ ، –١

على الترتيب فإن خارج القسمة هو س^{٢} – س – ١

١	– ٢	٠	+١	١
	١	□	□	
١	– ١			
١	+ –٢	٠	+ ١	
١	– ١	– ١	–١	
١	– ١	– ١	٠	

خارج القسمة

س^{٢} – س – ١

∴ $\lim_{\text{س} \leftarrow ١} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} - \text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٤)}$ = $\frac{١ - ١ - ١}{١ + ٤}$ = $\frac{١}{٥}$

مثـــال٨ : $\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٧\text{س} + ٦}{٣\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ٤}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{(١)^{٣} - ٧ \times ١ + ٦}{٣(١)^{٢} - ٨ \times ١ + ٤}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

١	+ ٠	– ٧	– ٦	٢
	٢	□	□	
١	+ ٢	– ٧	–٦	
١	+ ٢	٤	٦	
١	+ ٢	–٣	٠	

خارج القسمة

س^{٢} + ٢ س –٣

∴ $\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)(٣\text{س} - ٢)}$

= $\lim_{\text{س} \leftarrow ٢} \frac{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣)}{(٣\text{س} - ٢)}$

$\frac{(٤ + ٤ - ٣)}{(٦ - ٢)}$ = $\frac{٥}{٤}$

الضرب فى المرافق :

إذا وجد فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أو المقام أو كليهما)

نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (فى البسط أو المقام أو كليهما)

مثـــ٩ـــال : $\lim_{س \to ٠} \frac{س^٢ + ٢ س}{\sqrt{س + ٩} - ٣}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ٠ نجد أن : د (٠) = $\frac{(٠)^٢ + ٢ \times ٠}{\sqrt{٠ + ٩} - ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س + ٩} + ٣$ نجد أن :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س (س + ٢)(\sqrt{س + ٩} + ٣)}{(س + ٩) - ٩}$$

$$= (٠ + ٢) (\sqrt{٠ + ٩} + ٣) = ١٢$$

مثـــ١٠ـــال : $\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣ - ٣}{\sqrt{٣ + ١} - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س + ١} + ٢$ نجد أن :

$$\lim_{س \to ٠} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)}{(س + ١) - ٤} = (\sqrt{٣ + ١} + ٢) = ٤$$

مثـــ١١ـــال : $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^٢ - س}{س - ٢} - \frac{٢}{س - ٢} \right)$

الحـــــــــــل

بتوحيد المقامات نجد أن :

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$$

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\frac{٢^{٢} - ٢ - ٢}{٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢} = ٢ + ١ = ٣$

تمـــــــــارين

أكمـــــل ما يأتى

(١) $\lim\limits_{س \to ٢} (٣س - ١) =$ .... (٢) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣}$ ......

(٣) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢} =$ ....

(٤) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} (٢س - \text{جا } س) =$ ....

(٥) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{أ}{س + ١} = ٤$ فإن : أ = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim\limits_{س \to ٤} (٣س - \sqrt{س})$ (أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٢) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٣س^{٢} - ١٢}{س + ٢}$ (أ) ١٨ (ب) −٣ (جـ) ١٢ (د) −١٢

(٣) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - س - ٦}{س^{٢} + س - ١٢}$ (أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) −١ (د) −٥

(٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ (أ) ٠ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرفة

(٥) ∴ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا } س}{س}$ (أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\pi}$ (د) غير معرفة

أجد كلاً مما يأتى :

١	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + س + ٦}{س + ٣}$	٢	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٩}{س + ٣}$
٣	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + س - ٦}{س - ٢}$	٤	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$
٥	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٥س + ٦}{س + ٣}$	٦	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣}$
٧	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤}$	٨	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$
٩	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ١}{٢س - ٢}$	١٠	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{٢} - ١٢}{س^{٣} - ٨}$
١١	$\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س - ١٠}{س^{٢} - ٥س}$	١٢	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س^{٢} - س}$
١٣	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} + ٢س - ٨}$	١٤	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} + ٩س + ١٨}$
١٥	$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س^{٢} - ١}$	١٦	$\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٤}$
١٧	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^{٢} - ٧س + ٣}{س - ٣}$	١٨	$\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{٢} - س - ٤}{س^{٢} + ٣س + ٢}$

١٩	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{٢س^٢ + ٣س - ١٤}{٣س^٢ - ٤س - ٤}$	٢٠	$\underset{س \to -١}{نهـا} \frac{٢س^٢ + ٧س + ٥}{٣س^٢ + ٤س + ١}$
٢١	$\underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{٢س^٢ - ٧س - ٤}{س^٢ - ٧س + ١٢}$	٢٢	$\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{٢س^٢ - ٥س - ٣}{س - ٣}$
٢٣	$\underset{س \to ٣}{نهـا} \left(\frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ - ٩}\right)^٢$	٢٤	$\underset{س \to \frac{٢}{٣}}{نهـا} \left(\frac{٩س^٢ - ٤}{٣س - ٢}\right)^٢$
٢٥	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^٣ - س - ٦}{س^٢ - ٤}$	٢٦	$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{س^٣ - ٢س^٢ + ١}{س^٣ - ١}$
٢٧	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^٣ - س^٢ - ٨س + ١٢}{س^٢ - ٣س + ٢}$	٢٨	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^٣ - س^٢ - ٤س - ٤}{س^٢ + س - ٦}$

٢٩	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^٣ + س - ١٠}{س^٢ - ٤س + ٤}$	٣٠	$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{س^٣ + ٤س^٢ - س - ٤}{س^٤ - ١}$
٣١	$\underset{س \to ٥}{نهـا} \frac{س - ٥}{\sqrt{س - ٤} - ١}$	٣٢	$\underset{س \to -١}{نهـا} \frac{\sqrt{س + ١٧} - ٤}{س + ١}$
٣٣	$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{س^٢ + ٢س}{\sqrt{س + ٢٥} - ٥}$	٣٤	$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢س}$
٣٥	$\underset{س \to -١}{نهـا} \frac{\sqrt{س^٢ - س + ٢} - ٢}{\sqrt[٣]{س^٣ + ١}}$	٣٦	$\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{٧ - س} - ٢}$

نظرية ٤ : نهاية دالة (بالقانون)

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن} \times \text{أ}^{\text{ن}-1}$$ لكل: ن ∈ ح − { ٠ }

نتيجة:

$$\lim_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \text{ن} \times \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$$ لكل: ن، م ∈ ح − { ٠ }

مثال ١ : $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} + ٣٢}{\text{س} + ٢} = \frac{٣٢ + ٣٢}{٢ + ٢} = ١٦$ " معرفة "

مثال ٢ : $\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٤} + ٨١}{\text{س} - ٣} = \frac{٨١ + ٨١}{٣ - ٣} = \frac{١٦٢}{\text{صفر}}$ كمية غير معرفة

مثال ٣ : $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٨}{\text{س} - ٢}$

الحل

بالتعويض نجد أن : د (٢) $= \frac{١٢٨ - ١٢٨}{٢ - ٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

∴ المقدار $= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٧} - ٢^{٧}}{\text{س} - ٢} = ٧ \times ٢^{٧-١} = ٥ \times ٢^{٦} = ٣٢٠$

مثال ٤ : $\lim_{\text{س} \to -٤} \frac{\text{س}^{٣} + ٦٤}{\text{س} + ٤}$

الحل

بالتعويض نجد أن : د (ـ ٤) $= \frac{-٦٤ + ٦٤}{-٤ + ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

∴ المقدار $= \lim_{\text{س} \to -٤} \frac{\text{س}^{٣} - (-٤)^{٣}}{\text{س} - (-٤)}$

$= ٣ \times (-٤)^{٣-١} = ٣ \times (-٤)^{٢} = ٤٨$

مثـــال ٥ : $نهــا_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{س - \sqrt{٥}}$

الحـــــــــل

بالتعويض نجد أن : د $(\sqrt{٥}) = \frac{(\sqrt{٥})^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\sqrt{٥} - \sqrt{٥}} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية فير معينة

∴ المقدار = $نهــا_{س \to \sqrt{٥}} \frac{س^{٧} - (\sqrt{٥})^{٧}}{س - (\sqrt{٥})} = ٧ \times (\sqrt{٥})^{٦} = ٧ \times ٥^{٣} = ٨٧٥$

مثـــال ٦ : $نهــا_{س \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٣٢ س^{٥} + ٢٣٤}{٤ س - ٩}$

الحـــــــــل

بالتعويض نجد أن : د $(-\frac{٣}{٢}) = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

عندما : س ← $-\frac{٣}{٢}$ فإن : ٢ س ← −٣

∴ المقدار = $نهــا_{٢س \to -٣} \frac{(٢ س)^{٥} - (-٣)^{٥}}{(٢ س)^{٢} - (-٣)^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times (-٣)^{٣} = \frac{-١٣٥}{٢}$

مثـــال ٧ : $نهــا_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$

الحـــــــــل

بالتعويض نجد أن : د $(٠) = \frac{(٠ + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{٠} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بإضافة : (+٥ ، −٥) للمقام

، وعندما : س ← ٠ فإن : (س + ٥) ← ٥

∴ المقدار = $نهــا_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(س + ٥) - ٥}$

$= نهــا_{س+٥ \to ٥} \frac{(س + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(س + ٥) - ٥} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

مثـال٨ : $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٦} \frac{(\text{س} - ٥)^{٧} - ١}{\text{س} - ٦}$

الحـــــــــل

بالتعويض نجد أن : $\text{د}(٦) = \dfrac{(٦ - ٥)^{٧} - ١}{٦ - ٦} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بوضع: $(\text{س} - ٦) = (\text{س} - ٥ - ١)$ بالمقام ، وعندما : س ← ٦ فإن : $(\text{س} - ٥) \leftarrow ١$

∴ المقدار = $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٦} \frac{(\text{س} - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(\text{س} - ٥) - ١}$

$\displaystyle = \lim_{\text{س} - ٥ \to ١} \frac{(\text{س} - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(\text{س} - ٥) - ١} = ٧ \times ١^{٦} = ٧$

مثـال٩ : $\displaystyle \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٥\text{و})^{٧} - \text{س}^{٧}}{٣\text{و}}$

الحـــــــــل

بالتعويض نجد أن : $\text{د}(٠) = \dfrac{(\text{س} + ٥ \times ٠)^{٧} - \text{س}^{٧}}{٣ \times ٠} = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × $\frac{٥}{٣}$ ، إضافة (+ س ، − س) بالمقام

، وعندما : و ← ٠ ⟸ ٥و ← ٠ ∴ (س + ٥و) ← س

∴ المقدار = $\displaystyle \lim_{\text{و} \to ٠} \frac{\frac{٥}{٣}\left((\text{س} + ٥\text{و})^{٧} - (\text{س})^{٧}\right)}{\frac{٥}{٣}(٣\text{و}) + \text{س} - \text{س}}$

$\displaystyle = \frac{٥}{٣} \lim_{\text{س}+٥\text{و} \to \text{س}} \frac{(\text{س} + ٥\text{و})^{٧} - (\text{س})^{٧}}{(\text{س} + ٥\text{و}) - \text{س}} = \frac{٥}{٣} \times ٧ \times \text{س}^{٦} = \frac{٣٥}{٣}\,\text{س}^{٦}$

تمـــارين

أكمـــــل ما يأتى

(٢) $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{9} - 1}{\text{س}^{5} - 1} = ...$ (٢) $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^{3} - 27}{\text{س}^{2} - 9} = ...$

(٣) $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^{4} - 16}{\text{س}^{3} + 8} = ...$

(٤) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س} + 1)^{9} - 1}{\text{س}} = ...$

(٥) إذا كان : $\lim_{\text{س} \to \text{ك}} \frac{\text{س}^{5} - \text{ك}^{5}}{\text{س} - \text{ك}} = 80$ فإن : ك = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(٦) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{5} - 32}{\text{س} - 2}$ (أ) ١٦ (ب) ٥×١٦ (جـ) ٦٤ (د) ٣٢

(٧) $\lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^{5} + 1}{\text{س} + 1}$ (أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ـ٥ (د) ـ٤

(٨) $\lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{7} - \text{س}^{7}}{\text{هـ}}$ (أ) س^{7} (ب) 7س^{6} (جـ) صفر (د) ١

(٩) $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^{13} - 1}{\text{س}^{19} - 1}$ (أ) $\frac{13}{19}$ (ب) $\frac{19}{13}$ (جـ) ـ٦ (د) $1\frac{13}{19}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\lim_{\text{س} \to 3} \frac{\text{س}^{5} - 243}{\text{س} - 3}$	٢	$\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^{6} - 64}{\text{س} - 2}$
٣	$\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^{5} + 32}{\text{س} + 2}$	٤	$\lim_{\text{س} \to -\sqrt{3}} \frac{\text{س}^{7} - 27\sqrt{3}}{\text{س} + \sqrt{3}}$

٥	$\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ١٦}{٢س - ٤}$	٦	$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{٦} - ٣}{س - ١}$
٧	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٥} - ٨١س}{س - ٣}$	٨	$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ١٦}{س^{٢} + ٢س}$
٩	$\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٧} + ١٢٨}{س^{٣} + ٨}$	١٠	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٤} - ٨١}{س^{٣} + ٢٧}$
١١	$\underset{س \to \sqrt{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٥} - ٤\sqrt{٢}}{س^{٢} - ٢}$	١٢	$\underset{س \to -\sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٥} - ٢٥\sqrt{٥}}{س^{٢} - ٥}$
١٣	$\underset{س \to \frac{٣}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{٣٢س^{٥} - ٢٤٣}{٨س^{٣} - ٢٧}$	١٤	$\underset{س \to -\frac{٥}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١٦س^{٤} - ٦٢٥}{٨س^{٣} + ١٢٥}$
١٥	$\underset{٢س \to -١}{\text{نهـا}} \dfrac{١٦س^{٤} - ١}{١٢٨س^{٧} + ١}$	١٦	$\underset{٢س \to \sqrt{٣}}{\text{نهـا}} \dfrac{٨س^{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٢س - \sqrt{٣}}$
١٧	$\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٥} - ١٢٨س^{١٢}}{س^{٢} - ١٦س^{٦}}$	١٨	$\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{١٦س^{٤} - ١}{٢س - ١}$
١٩	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٢)^{٤} - ١٦}{س}$	٢٠	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٣)^{٤} - ٨١}{س}$
٢١	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ١)^{٥} + ١}{س}$	٢٢	$\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ٢)^{٥} + ١}{س + ٣}$
٢٣	$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(س + ١)^{٥} - ١}{س^{٢} + س}$	٢٤	$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{(س - ٢)^{٦} - ١٦}{س^{٢} - ٣س}$

٢٥	$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٣)^{٦} - ١}{\text{س} - ٤}$	٢٦	$\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(+ ٢)^{٥} + ١}{\text{س} + ٣}$
٢٧	$\underset{\text{س} \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٢)^{٦} - ١}{(\text{س} + ٢)^{٣} - ١}$	٢٨	$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + ٣\text{س})^{٧} - ١}{٤\text{س}}$
٢٩	$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٢\text{س} + ١)^{٥} - ١}{٥\text{س}}$	٣٠	$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٥\text{هـ})^{٩} - \text{س}^{٩}}{٦\text{هـ}}$
٣١	$\underset{\text{و} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٤\text{و})^{٦} - \text{س}^{٦}}{\text{و}}$	٣٢	$\underset{\text{و} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ٣\text{و})^{٨} - \text{س}^{٨}}{٤\text{و}}$
٣٣	$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٣)^{٦} - ١}{\text{س} - ٢}$	٣٤	$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^{٢} - ٣)^{\text{[illegible]}} - ١}{\text{س} - ٢}$
٣٥	$\underset{\text{س} \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} + ١)^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ١٢}$	٣٦	$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} + \text{س}^{٥} - ١٦٠}{\text{س} - ٢}$
٣٧	$\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٢)^{٥} + \text{س} - ٤}{٣\text{س} - ٩}$	٣٨	$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{١٦\text{س}^{-٤} - ١}{\text{س} - ٢}$
٣٩	$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٧]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٤]{\text{س}} - ١}$	٤٠	$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}} - ١٢٨}{\text{س} - ٤}$
٤١	$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - ٢}{\text{س} - ٢}$	٤٢	$\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س} + ٢٦} - ٣}{\text{س} - ١}$
٤٣	$\underset{\text{س} \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ٤}{\sqrt{\text{س}} - ٢}$	٤٤	$\underset{\text{س} \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - \sqrt{٣}}{\text{س} - ٩}$

٤٥) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} \times \frac{x^6-1}{x^3-1} \right)$

٤٦) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{x+1}{\sqrt{3-x}-2} - \frac{x^{10}-x}{x^{13}-x} \right)$

٤٧) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x^4-16} \times \frac{(x^5-32)^3}{(x-2)^2} \right)$

٤٨) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x\sqrt{x-3}-4}{x-4}$

٤٩) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+(a-1)x-a}{x-1} = 4$ أوجد قيمة : a

٥٠) إذا كانت : $f(x) = \begin{cases} 5-4x & ، \; x > 0 \\ 2x^2-1 & ، \; x < 0 \end{cases}$

أوجد : $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

٥١) إذا كانت : $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^8-a^8}{x^6-a^6} = 12$ أوجد قيمة : a

٥٢) إذا كانت : $f(x) = x^4$ أوجد : $\lim\limits_{x \to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$

نهاية الدالة عند اللانهاية

إذا كانت د (س) تقترب من قيمة حقيقية معينة (ل مثلاً) عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نقول أن الدالة لها نهاية

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة $\lim_{س \to \infty}$ د (س) = ل

نظرية (١) : $\lim_{س \to \infty} \frac{١}{س} =$ صفر

نتيجة (١) : $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س} =$ صفر حيث : أ ∈ ح - { ٠ }

نتيجة (٢) : $\lim_{س \to \infty} \frac{أ}{س^{ن}} =$ صفر حيث : أ ∈ ح - { ٠ } ، ن ∈ $ح^{+}$

تستخدم النظرية ونتائجها فى إيجاد $\lim_{س \to \infty}$ د (س) حينما

(١) تكون الدالة د على شكل كسر جبرى

(٢) كان التعويض المباشر يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ ، أ $\infty - \infty$

وذلك بأن نقسم كلاً من البسط والمقام على (س) مرفوعاً لأعلى قوة ^{أس} فى مقام الكسر

، أما إذا أعطى ($\infty - \infty$) فنضرب فى المرافق أولاً

ثم نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير (س) مرفوعاً لأعلى قوة (أس) فى المقام

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثـــال ١ : نهـــــــا (س ← ∞) $\frac{٥ س^٢ - ٣ س}{س^٢ - ٢}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

∴ المقدار = نهـــــــا (س ← ∞) $\frac{٥ - \frac{٣}{س}}{١ - \frac{٢}{س^٢}} = \frac{٥ - ٠}{١ - ٠} = ٥$

مثـــال ٢ : نهـــــــا (س ← ∞) $\frac{٥ س^٣ - ٣ س + ٦}{٣ س - ٧ س^٣}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

∴ المقدار = نهـــــــا (س ← ∞) $\frac{٥ - \frac{٣}{س^٢} + \frac{٦}{س^٣}}{\frac{٣}{س^٢} - ٧} = \frac{٥ - ٠ + ٠}{٠ - ٧} = -\frac{٥}{٧}$

مثـــال ٣ : نهـــــــا (س ← ∞) $\frac{٣ س^٢ + ٦}{٢ س - ٧ س^٣}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٣$

∴ المقدار = نهـــــــا (س ← ∞) $\frac{\frac{٣}{س} + \frac{٦}{س^٣}}{\frac{٢}{س^٢} - ٧} = \frac{٠ + ٠}{٠ - ٧} =$ صفر

مثـال٤ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{9\text{س}^3 - 2\text{س} + 5}{2\text{س} - \text{س}^2}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{9\text{س} - \frac{2}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^2}}{\frac{2}{\text{س}} - 1} = \dfrac{9 \times \infty - 0 + 0}{0 - 1} = \dfrac{\infty}{1}$

$\therefore$ ليس للدالة نهاية (اكبر أس فى المقام)

مثـال٥ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(\text{س} - 2)(3\text{س}^2 + 1)}{(4\text{س} + 3)(5\text{س}^2 - 1)}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^3 = \text{س} \times \text{س}^2 = \text{س}^2 \times \text{س}$

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(1 - \frac{2}{\text{س}})(3 + \frac{1}{\text{س}^2})}{(4 + \frac{3}{\text{س}})(5 - \frac{1}{\text{س}^2})} = \dfrac{(1 - 0)(3 + 0)}{(4 + 0)(5 - 0)} = \dfrac{3}{20}$

مثـال٦ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 + 1}}{\sqrt{9\text{س}^2 - 5}}$

الحـــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2} = \sqrt[3]{\text{س}^3}$

$\therefore$ المقدار $= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{8 + \text{س}^{-3}}}{\sqrt{9 - 5\text{س}^{-2}}} = \dfrac{\sqrt[3]{8 + 0}}{\sqrt{9 - 0}} = \dfrac{2}{3}$

مثـال٧ : $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\sqrt{س^{٢} + س} - \sqrt{س^{٢} - ١} \right)$

الحـــل

∴ د (∞) = ∞ − ∞ = كمية غير معنة

بالضرب بسطاً ومقاماً × المرافق نجد :

∵ $د(س) = \left(\sqrt{س^{٢} + س} - \sqrt{س^{٢} - ١} \right) \times \dfrac{\left(\sqrt{س^{٢} + س} + \sqrt{س^{٢} - ١} \right)}{\left(\sqrt{س^{٢} + س} + \sqrt{س^{٢} - ١} \right)}$

∴ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{٢} + س - (س^{٢} + ١)}{\left(\sqrt{س^{٢} + س} + \sqrt{س^{٢} - ١} \right)}$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{(س - ١)}{\left(\sqrt{س^{٢} + س} + \sqrt{س^{٢} - ١} \right)}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $س = \sqrt{س^{٢}}$

∴ $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{١ - س^{-١}}{\sqrt{١ - س^{-١}} + \sqrt{١ + س^{-٢}}} = \dfrac{١ - ٠}{١ + ١} = \dfrac{١}{٢}$

تمــــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(١) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{3}{\text{س}} = ...$

(٢) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س} - 5}} = ...$

(٣) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^5 + 5\text{س}^2}{3\text{س}^5 + \text{س}^2 + 8} = ...$

(٤) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{7}{\text{س}} + 3 \right) = ...$

(٥) $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(3\text{س}^{-2} + 7\text{س}^{-1} - 5 \right) = ...$

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^2 - 4}{\text{س} - 2}$ (أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ٠ (د) ∞

(٢) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt{\text{س}} + 3}{\sqrt{\text{س}} + 2}$ (أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) $\frac{3}{2}$

(٣) $\lim_{\text{هـ} \to \infty} \frac{(\text{س} + 1)(2\text{س} + 3)}{3\text{س}^2 + 7\text{س}}$ (أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) صفر (د) $\frac{2}{7}$

(٤) $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 7}}{\sqrt{9\text{س}^2 + 3}}$ (أ) $\frac{8}{9}$ (ب) $\frac{-7}{3}$ (جـ) $\frac{1}{12}$ (د) $\frac{2}{3}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ س^{٢} - ٣}{٥ س^{٢} - ١}$	٢	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٢} + ٤}{٢ - س^{٢}}$
٣	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ س^{٢} - ٣ س + ١}{٢ س^{٢} + س - ٥}$	٤	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٢} + ٢ س + ١}{٢ - ٦ س - س^{٢}}$
٥	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ س^{٤} - س^{٣} - ٤ س}{٣ س^{٥} - س^{٢} + ٧}$	٦	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ س^{٣} - ٢}{٤ - ٣ س^{٢}}$
٧	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ س^{٣} - ٢ س^{٢} - ٣}{٣ س^{٤} - س + ٧}$	٨	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} + ٣ س - ١}{٦ س^{٣} - س^{٢} + ٧}$
٩	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ س^{٣} + ٥ س^{٢} - ٤}{(٣ س + ١)(٢ س^{٢} - ١)}$	١٠	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٧ س - ١)(س^{٢} + ٥)}{(س + ٤)(٢ س^{٢} - س)}$
١١	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} (س - ١)}{س (س^{٢} + ٥ س - ٢)}$	١٢	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{(٢ س + ٥)(س - ١)(س + ٣)}{س (س - ٤)(٣ س + ١)}$
١٣	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{تهـا}} \frac{س - ١}{\sqrt{٤ س^{٢} + ٧}}$	١٤	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٩ س^{٢} - س - ١}}{٢ س + ٣}$
١٥	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٢٧ س^{٣} - ٥ س + ٤}}{٤ س^{٢} - ٣}$	١٦	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢٥ س^{٢} - ٦}}{\sqrt[٣]{٨ س^{٣} - س}}$
١٧	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{تهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س^{٣} - ٣ س + ١}}{\sqrt[٤]{١٦ س^{٤} - ٥}}$	١٨	$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٧]{س^{٧} - س^{٥} + س}}{\sqrt[٥]{س^{٥} - ٣ س}}$

١٩	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨س^٢ - ٣س - ٥}}{\sqrt[٦]{س^٤ - ٥}}$	٢٠	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{س+٢} + \sqrt{س+٥}}{\sqrt{٢س+٩}}$
٢١	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س\sqrt{س^٤ - ٢} + \sqrt{س^٢+٢}}{س^٣ - ١}$	٢٢	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{٨ - ٢٧س^٦}}{س \quad ٤س^٢ - ٧}$
٢٣	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(٢س^٣+١)^٢ + ٦س^٦}{(٣س^٣-١)^٣ - ٧س^٦}$	٢٤	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{٢س^٢}{س+١} - (٢س-٣) \right)$
٢٥	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢+س} - \sqrt{س^٢-س} \right)$	٢٦	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left[\sqrt{س^٢+٢} - \sqrt{س^٢-١} \right]$
٢٧	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢+٣س} - \sqrt{س^٢-١} \right)$	٢٨	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢-س} - \sqrt{٤س^٢+س} \right)$
٢٩	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢+س-١} - س \right)$	٣٠	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^٢-٣س+٤} - س \right)$
٣١	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣س^{-٣} + ٢س^{-١} + ١}{س^{-٤} - ٥س^{-٥} + ٢}$	٣٢	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥س^{-٤} + ٣س^{-٢} - ٤}{س^{-٥} - ٦س^{-٣} - ٢}$
٣٣	أوجد قيمة ك إذا كان :ـ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{ك س^٣ + ٣س}}{\sqrt{٤س^٢ + ٦}} = -١$	٣٤	$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣ \times ٥^س + ٢ \times ٧^س}{٩ \times ٧^س - ٦ \times ٤^س}$

٣٥) إذا كانت : $د(س) = \dfrac{ا س^٢ - ٣}{س^٢ - ب س - ٥}$ وكانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} د(س) = ٤$

، $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} د(س) = ٣$ أوجد قيمة كل من : ا ، ب

نهاية الدوال المثلثية

حقائق هامة :

كلاً من : حا س ، حتا س معرفة لجميع قيم س $\in$ ح أما طا س معرفة لجميع قيم س $\in$ ح ماعدا عند س = $\frac{\text{٢ن+١}}{\text{٢}}$ ط ، ن $\in$ ص فمثلا : ظا $\frac{\pi}{\text{٢}}$ غير معرف

(١) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ حا س = أ ، أ $\in$ ح

(٢) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ حتا س = أ ، أ $\in$ ح

(٣) $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ طا س = أ ، أ $\neq \frac{\text{٢ن+١}}{\text{٢}}\pi$ ، ن $\in$ ص

نظرية : $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = \text{١}$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)

نتيجة (١) : $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا س}}{\text{س}} = \text{١}$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)

نتيجة (٢) : $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)

$\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{طا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (حيث س مقاسة بالتقدير الدائرى)

$$\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{جا أ س}} = \underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا أس}}{\text{س}}} = \frac{\text{١}}{\text{أ}}$$

نتيجة (٣) : $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \text{١}$ ، $\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا أ س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \text{أ}$

$$\underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}^{\text{٢}}\text{أ س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س} \to \text{٠}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{حا أ س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}} = \text{أ}^{\text{٢}}$$

مثـال١ : (أ) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٥ س}}{\text{س}} = ٥$ (ب) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا ٢ س}}{\text{س}} = ٢$

مثـال٢ : (أ) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا ٥ س}}{\text{٤ س}} = \frac{٥}{٤}$

(ب) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا} \frac{٢}{٣}\text{س}}{\text{٦ س}} = \frac{٢}{٣} \div ٦ = ٤$

مثـال٣ : (أ) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٣ س}^٢}{\text{س}^٢} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٣ س}^٢}{\text{س}^٢} = ٣$

(ب) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا}^٢ \text{ ٥ س}}{\text{س}^٢} = \lim_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{\text{ظا ٥ س}}{\text{س}} \right)^٢ = ٢٥$

مثـال٤ : $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا}^٢ \text{ ٤ س}}{\text{س}^٢} = \lim_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{\text{جا ٤س}}{\text{س}} \right)^٢ = ٤^٢ = ١٦$

مثـال٥ : $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٥ س}}{\text{٣ ظا ٤ س}}$

الحـــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س ينتج

$\displaystyle = \frac{١}{٣} \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا ٥ س}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا ٤ س}} = \frac{١}{٣} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{١٢}$

مثـال٦ : $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{٧ س + حا ٣ س}}{\text{٣ س − ظا س}}$

الحـــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س ينتج

$\displaystyle = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{٧س}}{\text{س}} + \frac{\text{جا٣س}}{\text{س}}}{\frac{\text{٣س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا س}}{\text{س}}} = \frac{٧ + ٣}{٣ - ١} = ٥$

مثـــال ٧ : $\lim_{س \to ٠} \frac{٦ س^٢ + ٣ حا^٢ ٢ س}{٥ س^٢ - طا ٣ س^٢}$

الحـــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٦س^٢}{س^٢} + ٣ \left(\frac{حا٢س}{س}\right)^٢}{\frac{٥س^٢}{س^٢} - \frac{طا ٣س^٢}{س^٢}} = \frac{٦ + ٣ \times ٤}{٥ - ٣} = ٩$$

مثـــال ٨ : $\lim_{س \to ٣} \frac{حا (٥ س - ١٥)}{س - ٣}$

الحـــــــــل

$\because$ س $\leftarrow$ ٣ $\therefore$ (س - ٣) $\leftarrow$ ٠

$$= \lim_{س - ٣ \to ٠} \frac{حا ٥ (س - ٣)}{س - ٣} = ٥$$

مثـــال ٩ : $\lim_{س \to \frac{\pi}{٣}} \frac{طا (٩ س - ٣ \pi)}{٣ س - \pi}$

الحـــــــــل

$\because$ س $\leftarrow \frac{\pi}{٣}$ $\therefore$ س - $\frac{\pi}{٣} \leftarrow$ ٠ $\therefore$ ٣ س - $\pi \leftarrow$ ٠

$$= \lim_{٣س - \pi \to ٠} \frac{طا ٣ (٣ س - \pi)}{(٣ س - \pi)} = ٣$$

مثـــال ١٠ : $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \frac{جا (٢ س - \frac{١}{٢} \pi)}{طا (٤ س - \pi)}$

الحـــــــــل

$\because$ س $\leftarrow \frac{\pi}{٤}$ $\therefore$ س - $\frac{\pi}{٤} \leftarrow$ ٠ $\therefore$ ٤ س - $\pi \leftarrow$ ٠

$$= \lim_{٤س - \pi \to ٠} \frac{جا \frac{١}{٢} (٤ س - \pi)}{٤ س - \pi} \times \frac{٤ س - \pi}{طا (٤ س - \pi)} = \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$$

مثـــال ١١ : $\lim_{٢س \to \pi} \frac{\text{جتا س}}{\text{ظا } (٢ س - \pi)}$

الحــــــــــل

$\because ٢س \to \pi \quad \therefore س \to \frac{\pi}{٢} \quad \therefore س - \frac{\pi}{٢} \to ٠$

$= \lim_{س - \frac{\pi}{٢} \to ٠} \frac{-\text{حا } (س - \frac{\pi}{٢})}{\text{ظا } ٢ (س - \frac{\pi}{٢})} = \frac{١}{٢} \times \frac{-\text{حا } (س - \frac{\pi}{٢})}{(س - \frac{\pi}{٢})} \times \frac{(س - \frac{\pi}{٢})}{\text{ظا } (س - \frac{\pi}{٢})} = -\frac{١}{٢}$

مثـــال ١٢ : $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جا س}}{(س - \frac{\pi}{٢})^٢}$

الحــــــــــل

بوضع $ص = \frac{\pi}{٢} - س \quad \therefore س = \frac{\pi}{٢} - ص$

وعندما $س \to \frac{\pi}{٢} \quad \therefore ص \to ٠$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جا س}}{(س - \frac{\pi}{٢})^٢} = \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - \text{جا } (\frac{\pi}{٢} - ص)}{(ص)^٢}$

$= \lim_{ص \to ٠} \frac{١ - \text{جتا ص}}{(ص)^٢}$

وبوضع $د(ص) = \frac{١ - \text{جتا ص}}{(ص)^٢} \times \frac{١ + \text{جتا ص}}{١ + \text{جتا ص}} = \frac{١ - \text{جتا}^٢ \text{ص}}{ص^٢ (١ + \text{جتا ص})}$

$= \frac{\text{جا}^٢ \text{ص}}{ص^٢ (١ + \text{جتا ص})} = \left(\frac{\text{جا ص}}{ص}\right)^٢ \times \frac{١}{(١ + \text{جتا ص})}$

$\therefore \lim_{ص \to ٠} د(ص) = \lim_{ص \to ٠} \left(\frac{\text{جا ص}}{ص}\right)^٢ \times \lim_{ص \to ٠} \frac{١}{(١ + \text{جتا ص})}$

$= (١)^٢ \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

تمـــــارين

أكمــــــــل ما يأتى

(١) نهـــــا (س ← ٠) جتا ٣ س = ...

(٢) نهـــــا (س ← ٠) $\frac{\text{جا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$ = ...

(٣) نهـــــا (س ← ٠) $\frac{\text{٤ + ٥ س}}{\text{جتا ٣س}}$ = ...

(٤) نهـــــا (س ← ٠) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ ٦س}}{\text{٥س}^{٢}}$ = ...

(٥) نهـــــا (س ← ٠) (٣ س قتا ٢س) = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) نهـــــا (س ← ٠) $\frac{\text{٢س + جا ٣س}}{\text{ظا ٥س}}$ (أ) ٥ (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) ١ (د) صفر

(٢) نهـــــا (س ← ٠) $\frac{\text{جتا٣س جا ٢س}}{\text{٦س}}$ (أ) ٣ (ب) ١ (جـ) ٠ (د) $\frac{١}{٣}$

(٣) نهـــــا (هـ ← π) $\frac{\text{جا هـ}}{\text{π − هـ}}$ (أ) $\pi^{٢}$ (ب) π (جـ) −π (د) ١

(٤) نهـــــا (س ← ٠) $\frac{\text{١ − ظا س}}{\text{جا س − جتا س}}$ (أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٠ (د) غير معرف

أوجد كلاً مما يأتى :

١	نهـا س ← ٠ (حا ٤ س) / (٥ س)	٢	نهـا س ← ٠ (٦ س) / (طا ٢ س)
٣	نهـا س ← ٠ (حا ٥ س^{٢}) / (٢ س^{٢})	٤	نهـا س ← ٠ (٣ طا^{٢} ٢ س) / (٤ س^{٢})
٥	نهـا س ← ٠ (حا ٦ س) / (طا ٥ س)	٦	نهـا س ← ٠ (حا^{٢} ٢ س) / (طا٣ س^{٢})
٧	نهـا س ← ٢ (حا (٢ س – ٤)) / (س – ٢)	٨	نهـا س ← ٣ (طا (٢ س – ٦)) / (٣ س – ٩)
٩	نهـا س ← ٠ (حا ٢ س + طا ٣ س) / (٥ س)	١٠	نهـا س ← ٠ (حا ٣ س) / (٥ س حتا س)
١١	نهـا س ← ٠ (حا ٤ س – ٣ طا ٢ س) / (٥ س حتا ٥ س)	١٢	نهـا س ← ٠ (٦س – حا ٢ س) / (٨ س + حا٢س)
١٣	نهـا س ← ٠ (٥س + ٢ حا ٣ س) / (٤ س – طا٢ س)	١٤	نهـا س ← ٠ (٣س^{٢} + ٥ حا ٣ س^{٢}) / (س^{٢} + طا س^{٢})
١٥	نهـا س ← ٠ (٤ حا^{٢} ٢س – ٣ س^{٢}) / (٦ س^{٢} + طا٥س^{٢})	١٦	نهـا س ← ٠ (س^{٢}حتا٣س + طا^{٢} ٣س) / (٣س^{٢} – حا٢س)
١٧	نهـا س ← ٠ (حا^{٢} ٢س^{٢} + ٣ س^{٢}) / (٦ س^{٤} حتا ٣س)	١٨	نهـا س ← ٠ (٣س حا^{٢} ٢س) / (٥ س^{٣} – طا٣س^{٣})

١٩	نهـــا (س ← ٠) (حا ٣س طا٢س) ÷ (٢ س^{٢} حتا٢س)	٢٠	نهـــا (س ← ٠) س حا (١ ÷ س)
٢١	نهـــا (س ← ٠) [س (قتا س + طتا س)]	٢٢	نهـــا (س ← ٠) (حا^{٢} س) ÷ (س طا٢س)
٢٣	نهـــا (س ← ٠) (جا $\frac{١}{٢}$ س) ÷ (٢ س)	٢٤	نهـــا (س ← ٠) (٤ س حتا٢س) ÷ ((١ + ٢س) طا٤س)
٢٥	نهـــا (س ← ٠) (حا ٣س طا ٢ س) ÷ (٢ س^{٢} حتا ٢ س)	٢٦	نهـــا (س ← ٠) (٢ س^{٣} + حا٢ س^{٣}) ÷ (س^{٤} – طا^{٣} ٢ س)
٢٧	نهـــا (س ← ٠) (س حا س) ÷ (٣ س^{٢} – طا^{٢} س)	٢٨	نهـــا (س ← ٠) (١ – حتا^{٢} ٣س) ÷ (٤س^{٢})
٢٩	نهـــا (س ← ٠) (حا (٨ س – ٢ ط)) ÷ (طا (٤ س – ط))	٣٠	نهـــا (س ← ٠) (طا (٩ س – ٦ ط)) ÷ (جا (٣ س – ط))

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

نظرية :

الدالة د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← ٩ إذا و فقط إذا كانت نهايتها اليمنى و اليسرى عند ٩ موجودتين و كل منهما تساوى ل

أى أن : نهـــا (س ← ٠) د (س) = ل إذا و فقط إذا كان : د (٩⁺) = د (٩⁻) = ل

ملاحظات :

❖ إذا كان : د (٩⁺) = د (٩⁻) = ل فإن : نهـــا (س ← ٠) د (س) = ل

و بالعكس إذا كان : نهـــا (س ← ٠) د (س) = ل فإن : د (٩⁺) = د (٩⁻) = ل

❖ عند إيجاد نهاية دالة عندما س ← ٩ يراعى الآتى :

- إذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين و يسار ٩ مباشرة يجب بحث كل من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى للدالة ثم مقارنة النهايتين " إن وجدتا "

أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار ٩ مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالـــــة مباشرة دون بحث النهاية و النهاية اليسرى

➢ إذا كان : د (٩⁺) ≠ د (٩⁻) فإن : نهـــا (س ← ٠) د (س) ليست موجودة

➢ إذا كانت الدالة د معرفة على [٩ ، ب [أو] ٩ ، ب] فلبحث نهاية الدالة عند ٩ نبحث النهاية اليمنى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند ٩ و لبحث نهاية الدالة عند ب نبحث النهاية اليسرى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند ب

مثـــال١: إذا كانت : د (س) = { ٣س + ١ عندما س < ١ ، ٥ − س عندما س > ١ } أوجد كلاً من :

(٩) نهـــا (س ← ٠) د (س) (ب) نهـــا (س ← ٣) د (س) (ج) نهـــا (س ← ١) د (س)

الحـــــــل

(أ) ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٠ و هى : د (س) = ٣س + ١

∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠}$ (٣س + ١) = ٣ × ٠ + ١ = ١

(ب) ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٣ و هى : د (س) = ٥ ـ س

∴ $\lim_{س \to ٣}$ د (س) = $\lim_{س \to ٣}$ (٥ ـ س) = ٥ ـ ٣ = ٢

(جـ) ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١

∴ يجب بحث كلاً من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى عند س = ١

∵ د (١^-) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٣س + ١) = ٣ × ١ + ١ = ٤

، د (١^+) = $\lim_{س \to ١^+}$ (٥ ـ س) = ٥ ـ ١ = ٤

∵ د (١^-) = د (١^+) = ٤ ∴ $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٤

مثـــال: إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \frac{(س + ٣)^٢ - ٩}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ س + ٦ & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$

أوجد $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

الحـــــــل

∵ د (٠^-) = $\lim_{س \to ٠^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ $\frac{(س + ٣)^٢ - ٩}{س}$

= $\lim_{س \to ٠^-}$ $\frac{(س + ٣ - ٣)(س + ٣ + ٣)}{س}$ = ٦

، د (٠^+) = $\lim_{س \to ٠^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ (س + ٦) = ٠ + ٦ = ٦

∵ د (٠^-) = د (٠^+) = ٦ ∴ $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = ٦

مثـــ٣ـــال: إذا كانت : د (س) = { حا ٣ س / س عندما س < ٠ ، حتا ٣ س عندما س > ٠ } أوجد نهـــا د (س) (س ← ٠)

الحـــــل

∵ د (٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) حا ٣ س / س = ٣

، د (٠⁺) = نهـــا (س ← ٠⁺) حتا ٣ س = ١

∵ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻) ∴ نهـــا (س ← ٠) د (س) ليس لها وجود

مثـــ٤ـــال: إذا كانت : د (س) = { (أ س² + ٢ س − ٥) / (س − ١) عندما س < ١ ، ٣ س + ٥ عندما س > ١ }

لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة كل من أ

الحـــــل

∵ د (س) لها نهاية عند س = ١ ∴ د (١⁻) = د (١⁺)

∴ نهـــا (س ← ١⁻) (أ س + ٥)(س − ١) / (س − ١) = نهـــا (أ س + ٥)

∴ أ + ٥ = ٨ ومنها : أ = ٣

مثـــ٥ـــال: د (س) = { س |س| −١ عندما س < ١ ، س / |س| − ٢ عندما س > ١ } أوجد نهـــا د (س)

الحـــــل

∵ د(س) = { س × −س −١ = −س² −١ عندما س < ١ ، س / س − ٢ = ١ − ٢ = −١ عندما س > ١ }

د (٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) (−س −١) = −١ ، د (٠⁺) = نهـــا (س ← ٠⁺) −١ = −١

∵ د (٠⁺) = د (٠⁻) = −١ ∴ نهـــا (س ← ٠) د (س) = −١

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

تعريف :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة] ﻡ ، ب [أو المغلقة [ﻡ ، ب]

(١) الدالة ليست معرفة على يسار النقطة ﻡ فإننا نبحث النهاية اليمنة فقط د ($ﻡ^+$)

و تكون فى هذه الحالة نهـــا د (س) حيث س ← $ﻡ^+$ ، نهـــا د (س) غير متواجتان

(٢) الدالة ليست معرفة على يمين النقطة ب فإننا نبحث النهاية اليمنة فقط د ($ب^-$)

و تكون فى هذه الحالة نهـــا د (س) حيث س ← $ب^-$ ، نهـــا د (س) حيث س ← ب غير متواجتان

أى أن :

نهــاية الدالة عند النقطة الطرفية غير موجودة ويكون للدالة عند هذه النقطة نهــاية من جهة واحدة فقط [يمنى أ، يسرى]

مثــ١ــال : أبحث وجود نـهاية للدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند : س ← ٥

الحـــــــل

د (س) معرفة على [٥ ، ∞ [

∴ الدالة د معرفة فقط على يمين س = ٥

، نهـــا د (س) حيث س ← ٥^+ = نهـــا $\sqrt{س - ٥}$ حيث س ← ٥^+ = صفر

∴ نهـــا د (س) حيث س ← ٥^- غير موجودة ، نهـــا د (س) حيث س ← ٥ غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار ٥]

مثــ٢ــال : إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{ظا } ٤ س}{\text{جا } ٩ س} & ، -\frac{\pi}{٩} < س < ٠ \\ \frac{١}{٩}(ﻡ^٢ + ٢) & ، س > ٠ \end{cases}$

لها نـهاية عند س = ٠ أوجد قيمة ﻡ :

الحـــــــل

د (٠^-) = نهـــا (ظا ٤ س / جا ٩ س) حيث س ← ٠^- = $\frac{٤}{٩}$ ، د (٠^+) = $\frac{١}{٩}$ ($ﻡ^٢$ + ٢)

∵ الدالة لها نـهاية عند س = ٠ ∴ د (٠^-) = د (٠^+)

، $\frac{١}{٩}$ ($ﻡ^٢$ + ٢) = $\frac{٤}{٩}$ ∴ $ﻡ^٢$ + ٢ = ٤ ⟸ $ﻡ^٢$ = ٢ ∴ ﻡ = ± $\sqrt{٢}$

تمـــــــارين

(١) إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} س^2 + 5 + 6 & \text{عندما } س < 0 \\ 6 - س & \text{عندما } س > 0 \end{cases}$ أوجد كلاً من :

أ) $\lim_{س \to 1} د(س)$ ب) $\lim_{س \to -1} د(س)$ جـ) $\lim_{س \to 0} د(س)$

(٢) إذا كانت : د(س) = $س\,|س - 1| + 3$ أوجد كلاً من :

أ) $\lim_{س \to -1} د(س)$ ب) $\lim_{س \to 1} د(س)$ جـ) $\lim_{س \to 3} د(س)$

(٣) إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} س^2 + 3س & -2 < س < 0 \\ س - 1 & 0 < س < 3 \end{cases}$ أوجد كلاً من :

أ) $\lim_{س \to -2} د(س)$ ب) $\lim_{س \to 3} د(س)$ جـ) $\lim_{س \to 0} د(س)$

(٤) إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^5 + 1}{س + 1} & ، -1 < س < 0 \\ \dfrac{س \text{ حتا } س}{5س - 4 \text{ حا } س} & ، 0 < س < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ أوجد كلاً من :

أ) $\lim_{س \to -1} د(س)$ ب) د(س) جـ) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} د(س)$

(٥) إذا كانت : د(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{حا}(س - 1)}{س - 1} & ، س > 1 \\ \text{طا } \dfrac{\pi س}{4} & ، س < 1 \end{cases}$ أوجد $\lim_{س \to 1} د(س)$

(٦) إذا كان: للدالة د(س) = $\begin{cases} أس^2 - ب & ، س > 2 \\ أس + ب & ، س < 2 \end{cases}$ لها نهاية تساوى ٣

عندما $س \to 2$ أوجد قيمة كل من : أ ، ب

(٧) إذا كان: للدالة د(س) = $\begin{cases} 3 & س - 2 ، س < -1 \\ أس + ب & ، -1 < س < 3 \\ 6 - س & ، س > 3 \end{cases}$

لها نهاية عند كل من : $س = -1$ ، $س = 3$ أوجد قيمة كل من : أ ، ب

إتصال دالة عند نقطة

تعريف :

إذا كانت الدالة د معرفة على فترة ما و كانت ٩ تنتمى لهذه الفترة فإن :

د تكون متصلة عند ٩ إذا و فقط إذا كانت نهـــا (س ← ٩) د (س) = د (٩)

شروط إتصال دالة عند نقطة :

تكون الدالة د متصلة عند س = ٩ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١ – الدالة معرفة عند س = ٩ أى أن : د (٩) لها وجود

٢ – نهـــا (س ← ٩) د (س) لها وجود

٣ – نهـــا (س ← ٩) د (س) = د (٩)

ملاحظة :

يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة لعدم إتصال الدالة د عند النقطة س = ٩ فمثلاً إذا كانت الدالة غير معرفة عند س = ٩ فهى بالتالى غير متصلة عند س = ٩ و لا داعى أن نبحث عن تحقق الشرطين الآخرين

مثـــال ١ : ابحث إتصال الدالة : د (س) = | س – ١ | + ٣ عند س = ١

الحـــل

د (س) = { س – ١ + ٣ ، س ≥ ١ ؛ –س + ١ + ٣ ، س < ١ } = { س + ٢ ، س ≥ ١ ؛ ٤ – س ، س < ١ }

∵ د (س) معرفة عند س = ١ حيث : د (١) = ١ + ٢ = ٣

، د (1^-) = نهـــا (س ← 1^-) (٤ – س) = ٣

، د (1^+) = نهـــا (س ← 1^+) (س + ٢) = ٣

أى أن : نهـــا (س ← ١) د (س) = ٣

∴ د (١) = نهـــا (س ← ١) د (س) ∴ د متصلة عند س = ١

ملاحظة :

إذا كانت د (س) معرفة عند س = ϙ ، $\lim_{س \to ϙ}$ د (س) لها وجود ، كانت الدالة غير متصلة

عند س = ϙ لإختلاف د (ϙ) عن $\lim_{س \to ϙ}$ د (س) فيمكن جعل الدالة متصلة عند س = ϙ بإعادة تعريفها بجعل د (ϙ) = $\lim_{س \to ϙ}$ د (س)

مثـــ٢ـــال : إذا كانت : د (س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ٩} - ٣}{س} & ، س \neq ٠ \\ ϙ & ، س = ٠ \end{cases}$$

أوجد قيمة ϙ التى تجعل د متصلة عند س = ٠

الحـــــل

∵ د (س) متصلة عند س = ٠ ∴ د (٠) = $\lim_{س \to ٠}$ د (س)

∴ ϙ = $\lim_{س \to ٠} \dfrac{(\sqrt{س + ٩} - ٣)}{س}$ = $\lim_{س \to ٠} \dfrac{(\sqrt{س + ٩} - ٣)}{س} \times \dfrac{(\sqrt{س + ٩} + ٣)}{(\sqrt{س + ٩} + ٣)}$

= $\lim_{س \to ٠} \dfrac{س}{س (\sqrt{س + ٩} + ٣)}$ = $\dfrac{١}{٦}$

مثـــ٣ـــال: إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٣ ، س = –١ أوجد قيمة كل من : ϙ ، ب حيث : د (س) =
$$\begin{cases} ٣ س + ١ & ، س \leqslant -١ \\ ϙ س + ب & ، -١ < س < ٣ \\ س^{٢} - ٣ & ، س \geqslant ٣ \end{cases}$$

الحـــــل

∵ د (س) متصلة عند س = ٣ ∴ د (٣) = $\lim_{س \to ٣}$ د (س)

∴ د (٣) = د (٣^{-}) = د (٣^{+}) ∴ $(٣)^{٢}$ – ٣ = ٣ϙ + ب =٣ - - (١)

∵ د (س) متصلة عند س = –١ ∴ د (–١) = $\lim_{س \to -١}$ د (س)

∴ د (–١) = د (-١^{-}) = د (-١^{+}) ∴ –٣ + ١ = – ϙ + ب = –٢ - - (٢)

من (١) ، (٢)

تمـــــارين

١ ــ أبحث إتصال الدوال الآتية عند النقط المبينة :

(١) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨}{\text{س}^{٢} - ١٦} & \text{، س} < ٤ \\ \dfrac{٣}{٤} & \text{، س} \geqslant ٤ \end{cases}$ عند س = ٤

(٢) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ & \text{، س} \leqslant ٢ \\ ٣ & \text{، } ٢ < \text{س} < ٥ \\ \text{س} - ٢ & \text{، س} \geqslant ٥ \end{cases}$ عند س = ٢ ، س = ٥

(٣) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{|\text{س} - ٣|}{\text{س} - ٣} & \text{، س} \neq ٣ \\ ٢ & \text{، س} = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٤) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{حا س} + \text{حتا س} & \text{، س} \leqslant \dfrac{\pi}{٢} \\ ٢ + \text{حتا ٢ س} & \text{، س} > \dfrac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند س = ٣

٢ ــ أوجد قيمة الثابت أ التى تجعل د متصلة عند النقط المبينة

(١) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - (\text{أ} + ١)\text{س} + \text{أ}}{\text{س} - ١} & \text{، س} \neq ١ \\ ٣\text{س} - ١ & \text{، س} = ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٢) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا}^{٢} \text{ ٢ س}}{\text{س طا ٣ س}} & \text{، س} \neq ٠ \\ \text{أ} + ١ & \text{، س} = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

٣ ــ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ــ ٢ ، س = ٥ أوجد

قيمة كل من : أ ، ب حيث : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} - ٢ & \text{، س} \leqslant -٢ \\ \text{أ س} + \text{ب} & \text{، } -٢ < \text{س} < ٥ \\ \text{س}^{٢} - ١٢ & \text{، س} \geqslant ٥ \end{cases}$

٤ ــ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ١ ، س = ٢ أوجد

قيمة كل من : أ، ب حيث : $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} - ٢ & \text{، س} \leqslant ١ \\ \text{أ س} + \text{ب} & \text{، } ١ < \text{س} < ٢ \\ ٦\text{س} + ٢ & \text{، س} \geqslant ٢ \end{cases}$

إتصال دالة على فترة

تعريف :

(١) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [أ ، ب] فإن : الدالة د (س) تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة

(٢) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [أ ، ب] فإن : الدالة د (س) تكون متصلة على ف إذا تحققت الشروط الآتية :

أ – الدالة د متصلة على الفترة ف =] أ ، ب [

ب – الدالة د متصلة من اليمين عند أ أى : د (أ$^{+}$) = نهـا (س ← أ) د (س)

حـ – الدالة د متصلة من اليمين عند أ أى : د (أ$^{-}$) = نهـا (س ← أ) د (س)

ملاحظة :

الدالة د غير متصلة على الفترة ف =] أ ، ب [إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل حـ ∈ ف بحيث تكون د غير متصلة عندها أى إذا لم تتحقق إحدى الشروط :

أ – الدالة د غير معرفة عند حـ

ب – عدم وجود نهاية للدالة د عند حـ

حـ – إختلاف نهاية الدالة د عند حـ عن د (حـ)

بعض أنماط الدوال المتصلة :

(١) دوال كثيرات الحدود : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

(٢) الدوال الكسرية الجبرية : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ما عدا عند أصفار دالة المقام

(٣) الدوال المثلثية :

* دالة الجيب : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة جيب التمام : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة الظل : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح ما عدا عند النقط $\frac{٢ن + ١}{٢}$ ط حيث ن ∈ ص

نظرية :

إذا كانت $د_١$ ، $د_٢$ دالتين معرفتين على ف = [ٲ ، ب] و كانتا متصلتين على الفترة ف فإن كلاً من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف :

(١) $د_١ \pm د_٢$ (٢) $د_١ \cdot د_٢$ (٣) $\frac{د_١}{د_٢}$ بشرط $د_٢ \neq ٠$

مثـــ١ـــال : أبحث إتصال الدالة د حيث د (س) = $\begin{cases} ٣س + ١ & ، \quad -٣ \leqslant س < ٢ \\ س^٢ + ٣ & ، \quad ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$

الحـــــــــل

د (س) معرفة على [-٣ ، ٥]

(١) د (س) = ٣س + ١ لكل س ∋] -٣ ، ٢ [

∵ د (س) كثرة حدود ∴ د (س) متصلة على] -٣ ، ٢ [

(٢) د (س) = $س^٢ + ٣$ لكل س ∋] ٢ ، ٥ [

∵ د (س) كثرة حدود ∴ د (س) متصلة على] ٢ ، ٥ [

(٣) د (٢) = ٤ + ٣ = ٧

، $\lim_{س \to ٢^-}$ (٣س + ١) = ٧ $\lim_{س \to ٢^+}$ ($س^٢ + ٣$) = ٧

∴ $\lim_{س \to ٢}$ د (س) = د (٢) ∴ د (س) متصلة عند س = ٢

(٤) د (-٣) = -٨ ، $\lim_{س \to -٣^+}$ (٣س + ١) = -٨

∴ د (س) متصلة من اليمين عند س = -٣

، د (٥) = ٢٨ ، $\lim_{س \to ٥^-}$ ($س^٢ + ٣$) = ٢٨

∴ د (س) متصلة من اليسار عند س = ٥

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نستنتج أن د (س) متصلة على [-٣ ، ٥]

مثـــ٢ـــال : إذا كانت الدالة د متصلة على ح أوجد قيمة كل من : ٩ ، ب حيث : د (س) = { ٣ س − ٢ ، س ≤ −٢ ؛ ٩ س + ب ، −٢ < س < ٥ ؛ س^{٢} − ١٢ ، س ≥ ٥ }

الحـــــــــل

∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة على س = −٢

∴ د (−٢) = د (−٢$^{-}$) = د (−٢$^{+}$)

، نهـــــــا (س ← −٢$^{+}$) (٩ س + ب) = ٣×−٢ −٢ ∴ −٢ ٩ + ب = −٨ - - - (١)

الدالة متصلة عند س = ٥

∴ نهـــــــا (س ← ٥$^{-}$) (٩ س + ب) = (٥)^{٢} −١٢ ∴ ٥ ٩ + ب = ١٣ - - - (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ٩ = ٣ ، ب = −٢

تمـــــــارين

(١) أبحث إتصال كل من الدوال الآتية على ح :

١ − د (س) = { س + ٢ ، س ≤ ١ ؛ ٥ − ٤ س ، س > ١ }

٢ − د (س) = { س^{٢} − ١ ، −٢ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢ س + ١ ، ١ < س < ٣ ؛ ٣ س − ٢ ، ٣ ≤ س < ٦ }

٣ − د (س) = { ١ + حتا ٢ س ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{٢}$ ؛ ١ − حا س ، $\frac{\pi}{٢}$ < س < π }

٤ − د (س) = { س + ٢ ، س ≤ ٠ ؛ $\frac{\text{س} + \text{طا } ٣ \text{ س}}{٣\text{س} - \text{حا س}}$ ، س > ٠ }

(٢) أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة على ح حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س}^{٢} - ٤} &, \quad \text{س} \leqslant ٢ \\ \text{ك}\,\text{س}^{٢} - ٤ &, \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$$

(٣) إذا كانت الدالة د (س) =

$$\begin{cases} ٢\,\text{س}^{٢} - ١ &, \quad \text{س} \leqslant ١ \\ \text{ا}\,\text{س} + \text{ب} &, \quad ١ < \text{س} < ٣ \\ \dfrac{٢\,\text{س}^{٢} - \text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} + ٤} &, \quad \text{س} \geqslant ٣ \end{cases}$$

متصلة على ح أوجد قيمة كل من : ا ، ب

(٤) أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة على ح حيث :

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\,\text{س} + \text{ك} &, \quad \text{س} \leqslant ٢ \\ ١ - \text{ك}\,\text{س}^{٢} &, \quad \text{س} > ٢ \end{cases}$$